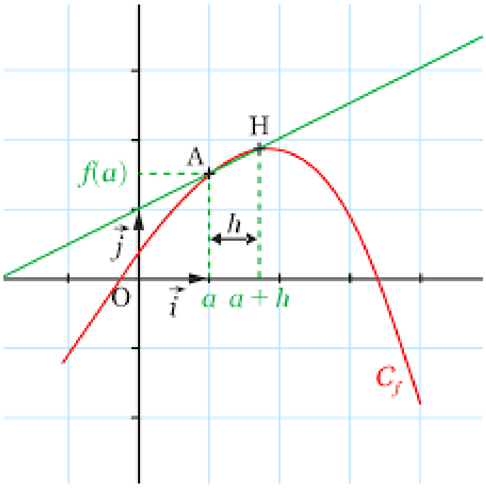
Terminale spéPC – FICHE maths en P.C : **Utilisation de la dérivée et de la primitive en P.C.**

I- Dérivée d'une grandeur physique scalaire (non vectorielle)



Il faut se rappeler comment on a obtenu la tangente T_A à la courbe Cf au point A(a,f(a)). On a pris un point H mobile sur le courbe avec des coordonnées M(x ;f(x)) soit H((a+h ; f(a+h)) et on a appelé nombre dérivé de f en a et noté f'(a), la limite, quand elle existait de la pente de la droite (AM) :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ soit encore $$\boxed{\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}$$

Quand il existe, le nombre dérivé de f en a, f'(a) est le coefficient directeur de la tangente au point a.

La fonction dérivée f' est la fonction qui à x associe le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x.

La notation différentielle de **f' la dérivée de f par rapport à x s'écrit** $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}$.

La notation différentielle de la dérivée seconde f'' de f par rapport à x s'écrit $\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dx^2}} = \frac{\mathrm{df'}}{\mathrm{dx}}$.

➔ En physique, on dérivera souvent par rapport au temps pour étudier des évolutions temporelles (au cours du temps) :

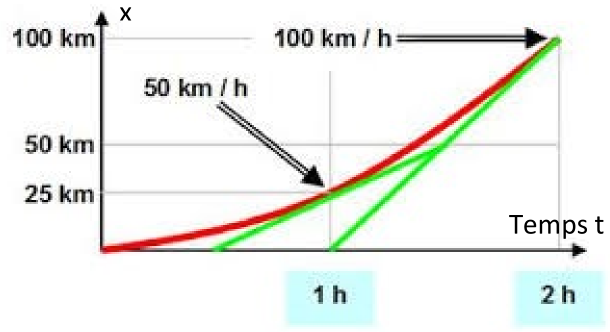
Ex 1: La vitesse suivant l'axe des x est la dérivée par rapport au temps de la coordonnée x : $\boldsymbol{v_x} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$ exprimée en **m.s⁻¹**

La vitesse suivant l'axe des y est la dérivée par rapport au temps de la coordonnée y : $\boldsymbol{v_y} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}$ exprimée en **m.s⁻¹**

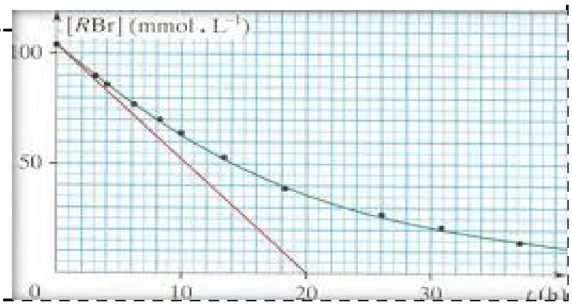
L'accélération suivant l'axe des x est la dérivée par rapport au temps de la coordonnée v_x soit $\boldsymbol{a_x} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v_x}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}$ exprimée en **m.s⁻²**

L'accélération suivant l'axe des y est la dérivée par rapport au temps de la coordonnée v_y soit $\boldsymbol{a_y} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v_y}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dt^2}}$ exprimée en **m.s⁻²**

Mouvement rectiligne accéléré suivant un axe (Ox)



Ex 2 : La vitesse volumique de disparition d'un réactif R est l'opposée de la dérivée par rapport au temps de la concentration [R] en R :
$\mathbf{v_{dispR}} = -\frac{\mathbf{d[R]}}{\mathbf{dt}}$ exprimée en **mol.L⁻¹.s⁻¹**. C'est donc l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant [R] en fonction du temps.



Quelques dérivées :

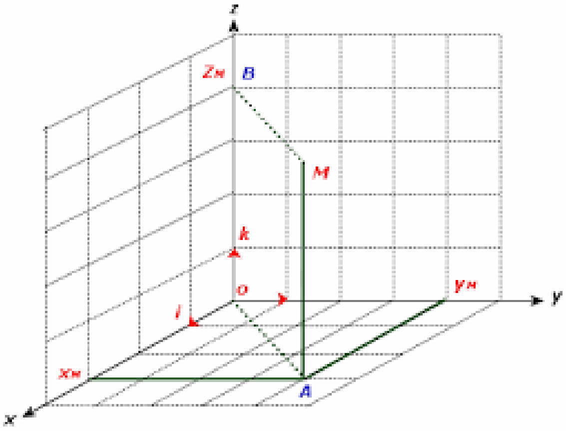
Les plus utiles en physique cette année:

fonction	Dérivée par rapport à t
$a.t^2 + b.t + c$ où a,b et c constantes	$2a.t + b$
$a \times e^{k.t}$ où a et k constantes	$a \times k \times e^{k.t}$

Structure de la fonction	Structure de la dérivée
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u'e^u$

Structure de la fonction	Structure de la dérivée
$au + bv$	$au' + bv'$
uv	$u'v + v'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
u^a	$au'u^{a-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

II- Dérivée d'une grandeur physique vectorielle :



Pour **dériver une grandeur vectorielle, il faut dériver ses coordonnées**.

Ex : Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ d'un point M dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x,y,z) :

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ de coordonnées } \left(v_x = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \ , v_y = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} \ , v_z = \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}\right)$$

III- Primitive d'une grandeur physique

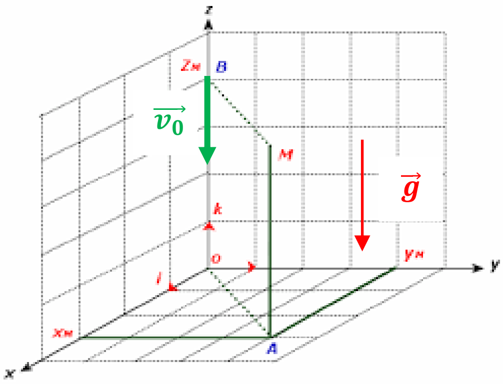
Soit F et f deux fonctions définies sur un intervalle I. La fonction **F est primitive de f** sur I si : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ ou par rapport au temps $\forall t \in I$, $\boxed{F'(t) = f(t)}$

Quelques primitives usuelles : <u>La constante C est souvent déterminée avec les conditions initiales</u> (t=0)

f(t)	F(t)
t^n	$\frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$
$a \times e^{k.t}$	$\frac{a}{k} e^{k.t} + C$
$\frac{1}{t}$	$\ln t + C$

Ex : Chute libre (sans frottement) d'une balle vers le bas avec une vitesse initiale verticale vers le bas de 5 m.s^{-1} et une altitude initiale de 15m.

➔ *Trouver l'équation horaire z(t) du mouvement. On donne g = 9,8 m.s^{-1}.*



<u>Système :</u> Balle <u>Référentiel Terrestre</u> (Galiléen)

<u>Application de la 2ème loi de Newton</u> : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a_G}$ ici $\vec{P} = m \times \overrightarrow{a_G}$

Or $\vec{P} = m \times \vec{g}$ donc $m \times \vec{g} = m \times \overrightarrow{a_G}$ ainsi $\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$

<u>Coordonnées de $\overrightarrow{a_G}$ dans le repère</u> $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$a_x = 0 \quad ; \quad a_y = 0 \quad ; \quad a_z = -g$$

Comme $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$ alors les coordonnées de $\vec{v}_G$ sont les primitives de celles de $\vec{a}_G$.

<u>Coordonnées de $\vec{v}_G$:</u>

$v_x = C_x$ une constante à déterminer avec la condition initiale $v_x(t=0) = C_x = 0$

$v_y = C_y$ une constante à déterminer avec la condition initiale $v_y(t=0) = C_y = 0$

$v_z = -g\,t + C_z$ une constante à déterminer avec la condition initiale $v_z(t=0) = -g \times 0 + C_z = C_z = -5\ m/s$

Ainsi $v_x = 0$; $v_y = 0$; $v_z = -g\,t - 5$ (en m/s)

Comme $\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ alors les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ sont les primitives de celles de $\overrightarrow{v_G}$:

<u>Coordonnées de $\overrightarrow{OG}$:</u>

$x = D_x$ une constante à déterminer avec la condition initiale $x(t=0) = D_x = 0$

$y = D_y$ une constante à déterminer avec la condition initiale $y(t=0) = D_y = 0$

$z = -g\,\frac{t^2}{2} - 5t + D_z$ une constante à déterminer avec la condition initiale $z(t=0) = D_z = 15$

Ainsi $x = 0$; $y = 0$; $z(t) = -g\,\frac{t^2}{2} - 5t + 15$ (z en en m avec t en s)